

文章编号 1004-924X(2004)03-0305-06

基于小波的多重分形图像去噪新算法

李会方,俞卞章

(西北工业大学 电子工程系,陕西 西安 710072)

摘要:针对多重分形分析很难估计有限长离散数据的多重分形谱这一问题,提出了一种基于奇异性分析的多重分形图像去噪算法。通过定义基于小波系数矩的配分函数,给出了一种有限长离散数据序列多重分形谱估计方法。图像去噪算法中图像的性质由多重分形谱决定,对噪声的类型没有提出任何假设条件,而是通过定义一个基于二维微局域(2-microlocal)分析的变换算子对每一点的 Hausdorff 指数进行处理,使处理后的图像中大多数点位于平滑区域的同时,谱的相对强度没有变化,从而取得最佳效果。实验结果表明,该方法在去除噪声的同时可很好地保留原始图像的纹理信息。

关键词:图像处理;小波;多重分形分析;Hausdorff 指数

中图分类号:TP391.4 文献标识码:A

New wavelet-based algorithm for denoising of multifractal images

LI Hui-fang, YU Bian-zhang

(Department of Electronic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

Abstract: A novel multifractal image denoising approach based on singularity structure analysis is proposed to overcome the difficulty in estimating the multifractal spectrum of discrete data for multifractal analysis. By defining the partition function for moments of the wavelet coefficients, a new estimator for multifractal spectrum is given. There is no assumption for the type of noise or global smoothness of original data, and the image is characterized by its multifractal spectrum. The Hausdorff exponent of the image is processed by defining a new transformation operation, so that most of the points in the denoised image lie in the smooth regions while the relative strength of the singularities is preserved. Experimental results show that the method proposed leads to a smooth image and preserves the texture information of original images very well.

Key words: image processing; wavelet; multifractal analysis; Hausdorff exponent

1 引言

分形几何是 20 世纪 70 年代 Mandelbrot 从非规整几何的量测问题出发,探索非线性复杂系统时创立的新理论。在分形理论中,分维数是定量

地描述事物内部结构的复杂变化性,反映分形结构复杂程度的一个重要特征参数。对于严格数学意义上的单一分形,它们具有严格的自相似性和跨越不同尺度的对称性,从而具有唯一的分维,因此用一个分维数可以揭示单一分形的特征。而自然界中的分形并不是具有严格数学意义上的自相

收稿日期:2003-11-14;修订日期:2004-02-11.

基金项目:国家杰出青年基金(No. 69925306);国家自然科学基金(No. 10274060)

似性,只是近似的统计意义上的,因而它们所对应的分维数在不同尺度观察下不尽相同。在这种情形下,单个分维数不足以刻划其特征,通常需要多个分维数描述,这种描述在本质上即为多重分形方法。

近年来,多重分形(multifractal)分析在奇异信号结构的研究中引起了广泛的关注,特别是在图像处理中,单一的分形维数只能从图像的整体来揭示图像的本质,而忽视了图像的局域特征。因此,对于不同的分形体其分形维数可能很接近,甚至完全相同,显然只用单一的分形维数不足以将复杂繁多的各种分形结构区分开来。多重分形方法考虑了系统的局域行为及分形体在其形成过程中不同层次的特征,因而可以从系统的局部出发来研究其最终的整体特征,更加全面而有效地对分形结构进行描述,从而揭示出其本质。

多重分形分析的主要缺点之一是有限长离散数据的多重分形谱估计非常困难。针对这一问题,结合小波可表示奇异性过程的特点,基于微局域分析理论提出了一种将小波和多重分形结合起来的新的图像处理算法。

2 多重分形与小波理论基础及方法

2.1 多重分形理论基础

多重分形是研究物理量或其他量在几何支集上分布的理论,支集可能是通常的规则集,也可以是分形集。分形测度的概念可用具有不同标度指数的分形子集表示。设 μ 是子集 P 中的 Borel 概率测度,对于 P 中的每一点,定义局部奇异指数为:

$$D(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log_{\mu}(B_{\epsilon}(x))}{\log \epsilon}, \quad (1)$$

$B_{\epsilon}(x)$ 是中心在 x 点,半径为 ϵ 的开球,当上式的极限存在时, $D(x)$ 称 Hausdorff 指数,可理解为在 x 附近的邻域内测度 μ 的奇异性。具有同样 $D(x)$ 值的点构成一个集合:

$$E(D) = \{x \mid D(x) = D\}, \quad (2)$$

为了分析退化的奇异过程,定义在半径为 ϵ 的邻域内局部奇异点的集合为:

$$E(D, \epsilon) = \{x \mid D(x) \leq D + \epsilon\}, \quad (3)$$

由上式所表示的集合的性质,可引入 Hausdorff 维

数,即:

$$\dim_H E = \inf \left\{ s \mid \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} |E_i|^s = 0 \right\} = \sup \left\{ s \mid \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} |E_i|^s = \infty \right\}, \quad (4)$$

式中 $\{E_i\}_{1 < i < \infty}$ 是 E 的覆盖,即:

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i, \quad |E_i| < \epsilon, \quad E_i \subset P, \quad \forall i, \quad (5)$$

最后得到:

$$f_h(D) = \dim_H E(D), \quad (6)$$

($D, f_h(D)$) 称为多重分形测度 μ 的 Hausdorff 谱,或局部奇异谱。

多重分形的另一种表示为 Legendre 谱 ($D, f_L(D)$), 设 $T(q)$ 为由 μ 的 q 阶矩决定的质量指数, $T(q)$ 为配分函数,则:

$$T(q) = \int P(x)^q d\mu(x) - f(D(q))$$

Legendre 谱可定义为:

$$f_L(D(q)) = f_L(D(q)) = \inf_q [q - T(q)], \quad (7)$$

$$D(q) = \frac{dT(q)}{dq}$$

$D(q)$ 与配分函数 $T(q)$ 之间满足下列公式:

$$T(q) = r^{D(q)}, \quad (8)$$

上式恰为 Legendre 变换。 $f_h(D)$ 和 $f_L(D)$ 是对奇异信号结构的不同表示形式。由于有限长离散数据的 $f_L(D)$ 比 $f_h(D)$ 容易计算,因此在图像处理中通常用 $f_L(D)$ 代替 $f_h(D)$ 。

2.2 基于小波的局部奇异性检测和多重分形估计

在许多领域存在着局部奇异性(如边沿、尖点等),设一个过程 $Y(x)$ 在时刻 x 的奇异性可用 Hausdorff 指数 $D(x)$ 表示, 定义为 $D(x)$ 的最大值,则存在一个多项式 P , 当 s 充分接近 x 时,满足:

$$|Y(s) - P(s)| \leq C|(s - x)|^D, \quad (9)$$

多重分形表示过程的奇异信息,另一方面由小波理论可知,小波可表示过程的振荡特性信息,考虑一维正交归一化小波基:

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad (10)$$

设小波母函数 ψ 具有 R 阶零矩,即:

$$\int x^r \psi(x) dx = 0 \quad r = 0, \dots, R, \quad (11)$$

过程 Y 在 L^1 范数下的小波系数为

$$d_{j,k} = \int Y(x) 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) dx, \quad (12)$$

由上式可知,当 $k2^{-j} \rightarrow x$ 且 $j \rightarrow \infty$ 时, $x \in [k2^j, (k+1)2^j]$, 另一方面 $|Y(s) - P(s)| = O(|s-x|^{1-2^j})$ 意味着

$$|d_{j,k}| = O(2^j) \quad \text{当 } 2^j \rightarrow x \text{ 时}$$

对于一个过程的 N 个采样点,根据小波系数 $\{d_{j,k} | j=1, \dots, \log_2(N), k=0, \dots, N2^{-j}-1\}$ 在尺度内具有稳态特性的特点,当 $q > 1$ 时,定义小波系数矩的估计为:

$$S_j(q) = \frac{1}{N2^{-j}} \sum_{k=0}^{N2^{-j}-1} |d_{j,k}|^q \frac{1}{N2^{-j}} \sum_{k=0}^{N2^{-j}-1} |d_{0,k}|^q, \quad (13)$$

为了表示一个过程的奇异结构、小波系数的高阶相关性与尺度特性,由小波系数的性质可定义配分函数为:

$$T(q) = \lim_{j \rightarrow \infty} \log_2 E\{|d_{j,k}|^q\}, \quad (14)$$

由公式(13), (14)可知, $T(q)$ 为 2^j 尺度下 $S_j(q)$ 的指数,因此在实际中可由 $j = j_1 \sim j_2$ 范围内的 $\log_2 S_j(q)$ 估计 $T(q)$, 即:

$$T(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j \log S_j(q), \quad (15)$$

式中加权系数 a_j 应满足下列两个条件:

$$j a_j = 0 \quad j a_j = 1$$

时,可由式(13), (14), (15)得到 $T(q)$ 的估计。

另一方面,由于 $T(q)$ 为凹函数,再结合 Legendre 变换,最后得到基于小波的 $(a, f_L(a))$ 估计新算法:

$$\begin{cases} \hat{a}(q_i) = [T(q_{i+1}) - T(q_i)] / q_0 \\ f_L(a(q_i)) = q_i (q_i) - T(q_i) \\ q_i = iq_0, (16) \end{cases}$$

3 多重分形图像恢复

图像处理在实际中有着广泛应用^[3-4],多重分形去噪声的基本思想是去除不需要的不规则性,保留有用的奇异性,使去除噪声后大多数点在平滑区域。对于图像处理,由于 $f(x)$ 值提供了所分析点规则性的局部信息, $f_h(x)$ 值提供了所分析点规则性的全局信息,不同信息的奇异性不同,其 $f(x)$ 、 $f_h(x)$ 的分布规律也不相同,在信号和图像的平滑区域 $f_h(x) = 2$ (或接近 2), 同时有 $f(x) = 2$ 。相反对于不规则信号有 $f_h(x) < 2$ 和

$f(x) < 2$ 。

由此可知,只要调整 $f_h(x)$,使得所有点的 $f_h(x)$ 的最大值 $f_h(x)$ 位于 $x = 1 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$),使大量点被调整为一致,从而导致区域光滑。所以根据多重分形谱的定义,一幅灰度图像中不重要的奇异性纹理的模型为:

$$\exists ! \quad 0 < 1 \quad f_h(x) = 2$$

根据上述模型和多重分形谱的性质可知,只要对 $f_h(x)$ 进行变换,使获得的 $f_h(x)$ 在 $x = 1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ 时谱的形状不变,也就是说,谱(奇异性)的相对强度没有变化即可实现图像的去噪。因此,假设变换算子为 O ,则修正后的谱 f_h 为:

$$f_h(x) = O\{f_h\} = f_h(x + \epsilon - 1), \quad (17)$$

通过上述变换在得到的图像中,大多数点的 Hausdorff 指数大于 1,而且是处处平滑的,同时谱(奇异性)的相对强度没有变化,或者说图像的视觉特征没有变化。因此,从原理上讲该方法并没有损失图像信息。

4 基于二维微局域分析的谱偏移算子估计

由以上分析可知,除了有效的多重分形谱估计算法,多重分形图像去噪的另一关键问题是算子 O 的设计。若信号的小波基为 $\{\psi(j, k), k\}$, 小波系数为 $\{c_k^j\}$,在 x_0 点的 Hausdorff 指数为 D_{x_0} 。在区域 $D_{x_0} = \{(j, k) | x_0 \in \sup(\psi(j, k))\}$ 中,根据小波系数的性质可知,当 $j \rightarrow \infty$ 时, $c_k^j \rightarrow O(2^{-j})$ 。所以由二维微局域分析理论^[5]可知将奇异值从增加到 D_{x_0} 的最简单方法是 c_k^j 乘以 $2^{-j} (D_{x_0} - D_{x_0})$ 。设变换算子为 $(O_{x_0})^{-1}$, 则:

$$\begin{aligned} (O_{x_0})^{-1} &= 2^{-j} c_k^j \\ f &= (O_{x_0})^{-1}(f), \quad (18) \end{aligned}$$

由^[3]得:

$$S_{(f, x_0)}(s) = S_{(f, x_0)}(s - \epsilon)$$

$S_{(f, x_0)}(s)$ 的定义为:

$$S_{(f, x_0)}(s) = \sup\{s \in R \mid f \in C_{x_0}^{s,s}\}, \quad (19)$$

式中 $C_{x_0}^{s,s}$ 为二维微局域空间, f 在 x_0 点的 Hausdorff 指数为:

$$f(x) = \sup\{s \mid s + S_{(f, x_0)}(s) = 0\} =$$

$$\sup\{s + s + S_{(f, x_0)}(s) = j\}, \quad (20)$$

设:

$$(f, x_0)(j) = \sup\{s + s + S_{(f, x_0)}(s) = j\}, \quad (21)$$

则:

$$(f) = (f, x_0)(j) + \dots, \quad (> 0), \quad (22)$$

(j) 在 [0, j] 内是非减且连续的, 并有 (0) =

。

5 实验结果

为了说明本文方法的图像去噪效果, 采用了综合孔径雷达 (SAR) 图像进行实验。分别采用本文方法、直方图均衡法和小波变换法对其进行去噪声处理, 并对结果进行比较。SAR 成像系统产生的噪声是斑点噪声, 针对斑点噪声的特殊性, 即图像和斑点噪声的奇异性不同, 可用多重分形方法处理。

用本文提出的方法实现图像去噪的过程如下:

- (1) 对图像进行小波变换。
- (2) 由公式 (13) ~ (16) 计算 $(f, f_L(j))$, 并由 $f_L(j)$ 代替 $f_h(j)$ 。
- (3) 由公式 (20) ~ (22) 计算 (f) 。
- (4) 由公式 (18) 得到修正后的谱 f_h 。
- (5) 根据图像各点的 $f_h(j)$ 和修正后的 f_h 之间的对应关系, 修正像素灰度。

图像去噪效果的评估原则为: (1) 在均匀区域对斑点噪声的抑制能力; (2) 保留边缘信息的能力; (3) 保持图像均值的能力。要同时达到原则 (1) 和 (2) 的要求比较困难, 为了更客观地评价本文算法的图像去噪声效果, 采用了平滑指数 FI 和边缘保持指数 ESI 作为衡量参数, 前者为去噪声后图像像素的均值 M 与其标准差 SD 的比值, 它反映了算法对图像的平滑能力, FI 值越大平滑作用越强, 其表达式为:

$$FI = \frac{M}{SD}$$

后者 (ESI) 表示在水平方向和垂直方向的边缘保持能力, ESI 值越大, 意味着边缘保持能力越强, 其表达式为:

$$ESI = \frac{\sum_{i=1}^N |DN_{R_1} - DN_{R_2}|_{去噪后}}{\sum_{i=1}^N |DN_{R_1} - DN_{R_2}|_{去噪前}}$$

式中, DN_{R_1} 和 DN_{R_2} 分别表示沿边界交接处, 左右或上下相邻像素的灰度值, N 是采样的样本点数。

图 1 是 256 × 256 像素, 256 个灰度级的含斑点噪声 SAR 原图像, 图 2 是偏移谱 f_h 取最大值时的 Hausdorff 指数偏移, $\alpha = 0.8$ 时本文方法对图 1 去噪声后的恢复图像; 图 3 是 $\alpha = 0.5$ 时本文方法对图 1 去噪声后的恢复图像; 图 4 是 $\alpha = 0.3$ 时本文方法对图 1 去噪声后的恢复图像; 图 5 是 Haar 小波变换算法对图 1 去噪声后的结果; 图 6 是直方图均衡算法对图 1 去噪声后的结果。表 1 给出了 FI 和 ESI 的比较结果。结果表明, 本文提出的算法优于直方图均衡算法和小波变换算法, 而且在 $\alpha = 0.8$ 时可得到最佳效果, 这是由于在这种情况下 α 接近 2, 图像处处平滑而且谱 (奇异性) 的相对强度没有变化, 有效保留了图像信息。另外, 本文算法的性能也优于直方图均衡算法。由图 2 和图 5 可以看出, 与小波变换法相比, 本文方法可更好地保留图像纹理的细节。

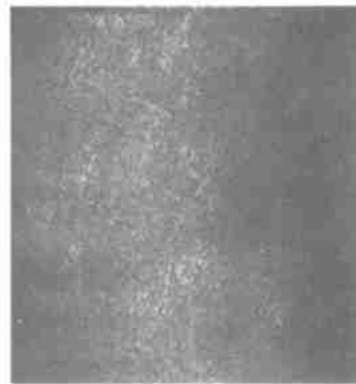


图 1 SAR 原始图

Fig. 1 Original image



图 2 $\alpha = 0.8$ 时的去噪声图像

Fig. 2 Denoise image ($\alpha = 0.8$)



图 3 $\lambda=0.5$ 时的去噪声图像
Fig. 3 Denoise image($\lambda=0.5$)



图 5 小波结果
Fig. 5 Denoise image with wavelet method



图 4 $\lambda=0.3$ 时的去噪声图像
Fig. 4 Denoise image($\lambda=0.3$)



图 6 直方图均衡
Fig. 6 Denoise image with Histogram equalization

表 1 去噪效果比较

Tab. 1 Comparison of the denoising capability

	SAR 原始图	直方图均衡	小波结果	本文算法结果		
				$\lambda=0.8$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.3$
<i>ESI</i>	1.000	0.684	0.707	0.922	0.880	0.874
<i>FI</i>	0.629	0.895	0.912	1.218	1.047	1.100

6 结 论

本文提出的图像去噪算法是一种基于图像和噪声奇异结构之间差异性的方法,这种方法之所以特别有效,是由于对多重分形谱进行变换的同时,谱(奇异性)的相对强度没有变化,保留了谱的

形状和图像信息。实验结果表明,本文方法优于传统算法,能有效地滤除斑点噪声干扰,保护图像细节。

基于多重分形的信号处理方法不仅可用于去噪,而且在图像纹理分析、雷达信号处理和通信信号处理等方面也极其有利。

参考文献:

- [1] DU G, YEO T S. A novel multifractal estimation method and its application to remote image segmentation[J]. *IEEE Trans on Geosci Remote*, 2002, 40(4):980-982.
- [2] MURGUJA J S, URIAS J. On the wavelet formalism for multifractal analysis[J]. *Chaos*, 2001, 11(4):858-863.
- [3] 孙俊喜, 陈亚珠. 一种具有边缘保持特性的超声图像小波域阈值去噪新方法[J]. *光学 精密工程*, 2002, 10(5):429-433.
SUN J X, CHEN Y ZH. Novel speckle reduction for medical ultrasound images based on edge preservation[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002, 10(5):429-433.
- [4] 刘光达, 赵立荣. 基于小波分析的医学 CR 影像随机噪声消除[J]. *光学 精密工程*, 2000, 8(5):428-431.
LIU G D, ZHAO L R. Removal of random noises for medical CR images using WT[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2000, 8(5):428-431.
- [5] Bertrand Guiheneuf A. Time domain characterization of 2-microlocal spaces[J]. *Fractals*, 1994, 3(2):371-378.

作者简介:李会方(1962-),男,陕西省人,现为西北工业大学电子工程系副教授,在读博士研究生,1980年毕业于兰州大学信息科学系,主要研究方向为智能信息处理、数字图像处理、多媒体信息处理和计算机应用。